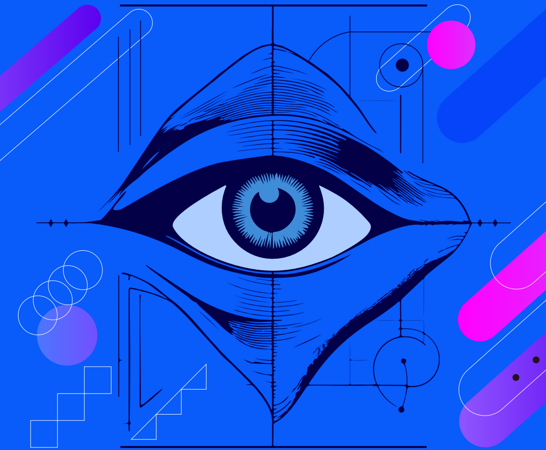
CURIOSO



¡EL MARAVILLOSO MUNDO DE LA MATEMÁTICA!
PARA DESCUBRIR, MOTIVARSE Y APRENDER

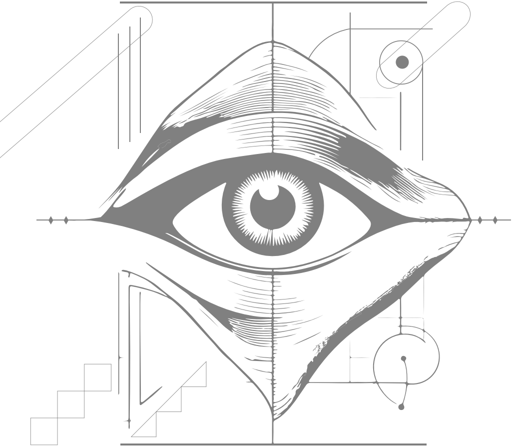
CIRO GONZÁLEZ MALLO CLAUDIA GONZÁLEZ ALEGRÍA GENOVEVA GARRIDO PEDREROS

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y FÍSICAS
FACULTAD DE INGENIERÍA

CINAP
CENTRO DE INNOVACIÓN EN APRENDIZAJE DOCENCIA Y TECNOLOGÍA EDUCATIVA
DIRECCIÓN GENERAL DE DOCENCIA
VICERRECTORÍA ACADÉMICA

CURIOSO



¡EL MARAVILLOSO MUNDO DE LA MATEMÁTICA!

PARA DESCUBRIR, MOTIVARSE Y APRENDER

CIRO GONZÁLEZ MALLO CLAUDIA GONZÁLEZ ALEGRÍA GENOVEVA GARRIDO PEDREROS

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y FÍSICAS
FACULTAD DE INGENIERÍA

CINAP
CENTRO DE INNOVACIÓN EN APRENDIZAJE DOCENCIA Y TECNOLOGÍA EDUCATIVA
DIRECCIÓN GENERAL DE DOCENCIA
VICERRECTORÍA ACADÉMICA

UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
TEMUCO

CURIOSO
¡EL MARAVILLOSO MUNDO DE LA MATEMÁTICA!
PARA DESCUBRIR, MOTIVARSE Y APRENDER

Autor **Ciro González Mallo**
Autora **Claudia Emma González Alegría**
Autora **Genoveva Soledad Garrido Pedreros**

Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Católica de Temuco

Colaboración

Centro de Innovación en Aprendizaje,
Docencia y Tecnología Educativa
Universidad Católica de Temuco

Directora **Dra. Mónica Kaechele Obreque**
Diseñador **Christian Bajas Torres**

ISBN: 978-956-6224-36-5

PRÓLOGO

En conversaciones cotidianas entre las personas, es común que, ante la palabra "matemática", surjan comentarios tales como "a mí siempre me han costado mucho ...", "no me gustan pues son muy difíciles ...", "nunca las entendí bien ...", "me hubiera gustado haber tenido la capacidad para aprenderlas ...", y otros parecidos. Son más las personas que "no les gustan" que aquellas que sí.

¿Cuáles son las preguntas que estas personas se hacen con respecto a su aprendizaje de la matemática?: ¿Soy incapaz de aprenderlas? ¿Son muy difíciles? ¿A mí me cuesta mucho comprenderlas? ¿Es genético? (... pues mis papás siempre dicen que ellos fueron malos para matemática), ... Tal vez estas mismas personas debieran reflexionar preguntándose ¿Qué puedo hacer para solucionar el problema? ¿De dónde provienen estas creencias? ¿Cómo puedo superar el temor a la matemática? ¿Qué me podría motivar para interesarme en aprender matemática?

La idea de escribir y compartir con toda la comunidad UCT esta premisa o sinopsis del libro **CURIOSO** es ayudar a que, a través de situaciones especiales, resultados sorprendentes, acertijos "mágicos", ..., sean más las personas que "se enamoren de la matemática".

Esperamos despertar la curiosidad de las personas que lo lean, a modo de generar interés por la matemática, aprenderla, facilitar los aprendizajes con métodos más amigables (y tan rigurosos como otros), intentando abrir "una pequeña puerta" que ayude a llegar a las diversas formas que se tienen de aprender.

Este libro **CURIOSO** y el compendio que aquí se comparte, está hecho para ser utilizado tanto por Profesores/as, estudiantes y público en general, pues, tal como lo indica la neurociencia, es posible"abrir la mente a la matemática a través de la curiosidad", pero no sólo la mente "que piensa" (la racionalidad, la de comprensión de las cosas, la de reflexión acerca de lo que vemos, ...) sino que también la "mente que siente" (las emociones), ya que nuestra mente es el resultado de la interacción entre estas dos.

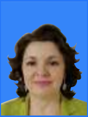
Esperamos que, a través de las curiosidades que se presentan, cada lector se sorprenda con las características que poseen los elementos matemáticos presentados, con los razonamientos entregados en cada caso, con la visualización de un problema, con una solución inesperada, ante el vínculo entre dos procedimientos distintos para un mismo resultado, etc.

Para quienes tengan la curiosidad de "hojear" esta síntesis del libro CURIOSO, son nuestros deseos que sigan entusiasmados con aprender más matemática (para algunos "ya enamorados" de ella), o bien sea el punto de partida para continuar aumentando sus conocimientos a partir de la poquita matemática que aquí se muestra.

RESEÑA AUTORES

Ciro González Mallo

Académico de Jornada Completa del Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad Católica de Temuco. Magister en Matemática, Diplomado en Pedagogía para la Educación Superior. Una Pasantía a Japón (Universidad de Tsukuba, Tsukuba Prefectura de Ibaraki) y dos Pasantías a México (TEC de Monterrey, Monterrey y Ciudad de México). Investigador en Proyectos de Innovación en Docencia y en Proyectos de Investigación en docencia universitaria. Coautor de tres libros. Presidente del Comité Permanente de la Jornada de la Matemática de la Zona Sur. Encargado Regional del Campeonato Escolar de Matemática CMAT, Región de La Araucanía. Le gusta el Álgebra, el cine, la música y el básquetbol. Es de Punta Arenas.



Claudia Emma González Alegría

Profesora de Matemáticas, Universidad de Talca. Magíster en Educación mención en Administración y Gestión Educacional Universidad Mayor Temuco. Coach Profesional Certificación Internacional en Coach Educativo Coaching Corp.org. International Association of Coaching. Diplomado en Educación Emocional y Bienestar. Red Internacional de Educación Emocional y Bienestar España. Máster en Educación Emocional y Bienestar de la Red Internacional de Educación Emocional y Bienestar España Diplomado en Coaching Ontológico Universidad Católica de Temuco. Cree en la importancia de conocer como aprende el cerebro para diseñar metodologías que permitan llegar al aprendizaje de todos los niños(as) y jóvenes.

Genoveva Soledad Garrido Pedreros

Ingeniero Matemático, Universidad de La Frontera. Temuco, Chile. Magíster en Pedagogía Universitaria, Universidad Mayor. Temuco, Chile. Experiencia en docencia universitaria, docencia en Programa Propedéutico y coordinación de Tutorías Pares, Universidad Católica de Temuco. Experiencia como Coordinadora de Equipo Éxito Académico, Universidad Católica del Norte. Trabajando en el desarrollo, implementación y seguimiento de programas de acceso, acompañamiento académico, socioemocional y nivelación para estudiantes de primeros años de universidad. Colaboradora en diversos proyectos Ministeriales de Fortalecimiento, Innovación y Becas de Nivelación Académica en Educación Superior. Sé que, aprender y enseñar se debe hacer con amor, pasión y humildad, permitiendo el asombro, la curiosidad, la duda y la satisfacción.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad Católica de Temuco por facilitar el trabajo que hemos realizado en pos de la obtención de este producto correspondiente a un primer libro digital.

Agradecemos a la Dra. Mónica Kaechele Obreque, Directora del Centro de Innovación en Aprendizaje, Docencia y Tecnología Educativa de la Universidad Católica de Temuco (CINAP UCT), y a todos los integrantes de su Unidad, por facilitar la concreción de este trabajo, y por toda la dedicación y apoyo brindado para que este material vea la luz.

Agradecemos a nuestras familias, quienes nos han brindado su amor y apoyo incondicional durante todo el proceso para hacer realidad lo que ayer fue una idea y hoy es un libro.

¿CÓMO USAR ESTE LIBRO?

RECOMENDACIONES PARA LEERLO Y UTILIZARLO

CURIOSO es un libro de curiosidades matemáticas, esto lo transforma en una herramienta invaluable para estudiantes y profesores(as) de todas las etapas educativas, desde la enseñanza básica hasta la universitaria.

Antes de aventurarse en la lectura de CURIOSO, es importante atender a algunas recomendaciones, de manera tal que todo lector pueda sacar el máximo de provecho a cada página, curiosidad y desafío que se presenta.

Sabemos que puede ser tentador buscar la respuesta de las curiosidades de inmediato, es por ello que, antes de revisar el Solucionario, es fundamental que, con su mayor disposición y esfuerzo, intente una, dos, incluso tres veces, resolver los problemas por sí mismo(a). Esto le ayudará a desarrollar sus habilidades matemáticas y a ejercitar su cerebro. Así que, ¡ponga a prueba su ingenio y no se rinda fácilmente!

Si después de intentar resolver alguna actividad propuesta se siente desorientado(a) respecto del procedimiento o respuesta, es hora de recurrir al Solucionario. Pero cuidado, no se convierta en un "solucionario-dependiente". Utilícelo como una guía para entender el proceso de resolución y no como una respuesta rápida y sin esfuerzo.

Además, le animamos a que investigue por su cuenta. No se conforme solo con la solución proporcionada en el solucionario, ¡vaya más allá! Investigue sobre los conceptos matemáticos involucrados en el problema, busque ejemplos adicionales y descubra curiosidades matemáticas relacionadas. ¡La matemática es un mundo fascinante lleno de sorpresas y curiosidades por descubrir!

Algo más que debe considerar el lector de CURIOSO es que cada actividad puede ser adaptada y utilizada para distintos públicos objetivos, es decir, si el lector es Profesor(a) de enseñanza básica, media o universitario y desea trabajar con sus estudiantes alguna curiosidad, podría considerar las siguientes sugerencias:

Para estudiantes de enseñanza básica, es fundamental fortalecer el trabajo de operatoria, por ello, desafiar al estudiante utilizando alguna(s) de las curiosidades del libro en las que se realizan cálculos de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, es una estrategia o herramienta de apoyo para motivar y despertar la curiosidad y creatividad del estudiante. Invite a sus estudiantes a probar la curiosidad que ha escogido con otros números, por ejemplo, si se debe comenzar con un número de tres dígitos, solicite a tres estudiantes un dígito a cada uno, esto los hará comprender de forma directa que el número ha sido construido al azar y que el procedimiento que se utiliza sirve para cualquier otro número.

Para estudiantes de enseñanza media (todos los grados) o universitaria (en especial de primer año), las curiosidades del libro pueden ser utilizadas para introducir, fortalecer o profundizar alguna propiedad o concepto matemático que se encuentre trabajado el docente. Proponga a sus estudiantes probar la curiosidad que se encuentre desarrollando con otros números, a explorar qué sucede si, por ejemplo, en lugar de descubrir o calcular cuál es el resultado de la suma de los 100 primeros números naturales (de 1 a 100), la pregunta fuese, ¿cuál es el resultado de sumar todos los números desde 50 a 150?, ¿sirve el mismo procedimiento utilizado para sumar de 1 a 100?, ¿existe más de una forma de calcular el resultado? Además, introduzca el interés por realizar las demostraciones matemáticas, esto les permitirá a sus estudiantes desarrollar el pensamiento analítico y crítico, ejercitando también su capacidad y destreza para resolver problemas matemáticos de mayor complejidad.

ÍNDICE

CURIOSO

Les damos la bienvenida
Que el viaje a través de este
libro sea emocionante

CURIOSO

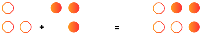
Si sabemos sumar, podemos intentar determinar la suma de los primeros números naturales.

Por ejemplo:
1+2 ; 1+2+3 ; 1+2+3+4 ; 1+2+3+4+5 ...

Para obtener la respuesta podemos ayudarnos usando dibujos.

Para 1+2

En lugar de obtener la suma propuesta, haremos la suma de dos veces la expresión y luego consideramos la mitad de lo que nos resulte.



= **$2\cdot3= 6$**

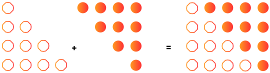
Y la mitad de ese resultado es $\frac{2\cdot3}{2}=\frac{6}{2}=3$

Para 1+2+3

= **$3\cdot4= 12$**

Y la mitad de ese resultado es $\frac{3\cdot4}{2}=\frac{12}{2}=6$

Para 1+2 +3+4



= **$4\cdot5= 20$**

Y la mitad de ese resultado es $\frac{4\cdot5}{2}=\frac{20}{2}=10$

Deducir el valor de 1+2+3+4+5 .
¿Se puede dar una fórmula general para 1+2+3+...+n?

Sumando los primeros números naturales: La historia de Gauss

J. B. Büttner, maestro de un colegio alemán, pidió a todos los niños a sumar los 100 primeros números naturales para tenerlos entretenidos y callados un buen rato. Carl Friedrich Gauss obtuvo la respuesta casi de inmediato: 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 = 5050.

A continuación se muestran dos formas posibles de cómo Gauss pudo hacer lo pedido, para responder a la tarea dada por su profesor Büttner.

Primera forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	43	44	45	46	47	48	49	50	
100	99	98	97	96	95	94	93	58	57	56	55	54	53	52	51	+
101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	

Sacando cuentas, después de sumar en forma vertical las distintas parejas que se formaron, se obtuvo 50 veces como resultado la suma 101.

De este modo, el resultado final correspondiente a la suma de los cien primeros números naturales es:

$$50\cdot101=\frac{100\cdot101}{2}=5050$$

Segunda forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	93	94	95	96	97	98	99	100	
100	99	98	97	96	95	94	93	8	7	6	5	4	3	2	1	+
101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	101	

Sacando cuentas, después de sumar en forma vertical las distintas parejas que se formaron, se obtuvo 100 veces como resultado la suma 101 .

De este modo, como en la suma obtenida se incluyó dos veces la suma solicitada, el resultado final correspondiente a la suma de los cien primeros números naturales es:

$$\frac{100\cdot101}{2}=50\cdot101=5050$$

Investigar los hitos relevantes de la vida de Gauss.

La **multiplicación** que se conoce hoy se puede realizar de varias formas esquemáticas que se han utilizado en distintos lugares del mundo y durante la historia del desarrollo de las matemáticas.

Aquí se mostrarán algunas de esas formas y se ejemplificará con la multiplicación entre 47 y 632 . En una multiplicación, el primer número se llama "**multiplicando**" y el segundo se llama "**multiplicador**".

1) Forma tradicional

Se multiplica el dígito de las unidades del multiplicador por el multiplicando, y el resultado se escribe debajo del multiplicando.

$$\begin{array}{l} \underline{47} \cdot 632 \\ 94 \end{array}$$

Luego se multiplica el dígito de las decenas del multiplicador por el multiplicando, y el resultado se escribe debajo del resultado anterior desplazado un espacio hacia la izquierda.

$$\begin{array}{r} \underline{47} \cdot 632 \\ 94 \\ 141 \end{array}$$

Después se multiplica el dígito de las centenas del multiplicador por el multiplicando, y el resultado se escribe debajo del resultado anterior desplazado un espacio hacia la izquierda.

$$\begin{array}{r} \underline{47} \cdot 632 \\ 94 \\ 141 \\ 282 \end{array}$$

Finalmente, para obtener el valor del producto, se suman los tres resultados anteriores usando la disposición en que quedaron después de escribirlos como se indica en cada paso previo.

$$\begin{array}{r} \underline{47} \cdot 632 \\ 94 \\ 141 \\ \underline{282} \\ 29704 \end{array}$$

2) Descomponiendo el multiplicador

El multiplicador se descompone a través de su forma desarrollada (usando las potencias de 10), luego el multiplicando se multiplica por cada uno de los sumandos obtenidos en la descomposición anterior (usando la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición) y los resultados se suman.

En nuestro ejemplo: $632 = 600 + 30 + 2$

Luego: $47 \cdot 632 = 47 \cdot (600 + 30 + 2)$

Así: $47 \cdot 600 = 28200$, $47 \cdot 30 = 1410$, $47 \cdot 2 = 94$

Por lo tanto: $47 \cdot 632 = 28200 + 1410 + 94 = 29704$

3) Descomponiendo ambos números y usando un arreglo (array)

En este caso, se descomponen ambos números (multiplicando y multiplicador), se ubican en un arreglo rectangular ubicando una descomposición en la parte superior y la otra verticalmente al lado izquierdo, se multiplica en todas las posiciones y luego se suman todos los resultados.

En nuestro ejemplo: 47 = 40 + 7
632 = 600 + 30 + 2

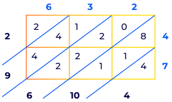
Luego:

	40	7
600	24000	4200
30	1200	210
2	80	14

Por lo tanto: 47·632 = 24000 + 4200 + 1200 + 210 + 80 + 14 = 29704

4) Usando el método hindú

Entorno a un rectángulo, se escribe el multiplicando en la parte superior y el multiplicador al costado derecho (o al revés). Luego, se multiplica cada dígito del multiplicando con cada dígito del multiplicador, escribiendo los resultados en casilleros del rectángulo dividido por diagonales. Se suman los números de cada una de las diagonales y de esos resultados se obtiene el producto requerido.



Dígito de las unidades: es 4
Dígito de las decenas: es 0
Dígito de las centenas: 6 + 1 = 7 , luego es 7
Dígito de las unidades de mil: es 9
Dígito de las decenas de mil: es 2

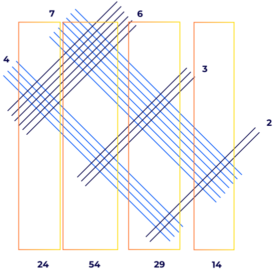
Por lo tanto, el resultado es:

47·632 = 29704

5) Método japonés (o Maya): Usando el método gráfico

Los dígitos del multiplicando y del multiplicador se representan por el número de rectas que indica el dígito, se dibujan adecuadamente según cierta disposición necesaria y luego se suman de cierto modo las intersecciones obtenidas con las rectas dibujadas.

En nuestro ejemplo:



Finalmente, para obtener el producto entre los números se hace:

Dígito de las unidades:	de 14	,	es 4
Dígito de las decenas:	de 29 + 1 = 30	,	luego es 0
Dígito de las centenas:	de 54 + 3 = 57	,	luego es 7
Dígito de las unidades de mil:	de 24 + 5 = 29	,	luego es 9
Dígito de las decenas de mil:	es 2		

Por lo tanto, el resultado es:

$$47 \cdot 632 = 29704$$

6) Método Ruso

Consiste en duplicar el multiplicador mientras se reduce el multiplicando a la parte entera de su mitad, hasta que el multiplicando sea 1.
Luego, se suman todos los multiplicadores correspondientes a los multiplicandos impares.

En nuestro ejemplo:

Multiplicando	Multiplicador	¿Se suma?
47	632	si
23	1264	si
11	2528	si
5	5056	si
2	10112	no
1	20224	si

Por lo tanto, el resultado es:

$$47 \cdot 632 = 632 + 1264 + 2528 + 5056 + 20224 = 29704$$

Obtener el producto entre 123 y 412 usando los distintos métodos dados.

IV | Multiplicando por 9 y sumando un natural

CURIOSO

Al multiplicar por 9 y a los resultados sumarles un número natural, se obtiene una curiosidad muy llamativa.

Curiosidades:

1) Veamos los siguientes resultados:

$$\begin{array}{ll} 0 \cdot 9 + 1 & = 1 \\ 1 \cdot 9 + 2 & = 11 \\ 12 \cdot 9 + 3 & = 111 \\ 123 \cdot 9 + 4 & = 1111 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

¿Cuál sería el siguiente producto - suma?
¿Qué da como resultado?
Completar la lista hasta sumar 10 al lado izquierdo.

2) Se puede ver en la curiosidad anterior que existe una linda regularidad hasta que se suma 10 al lado izquierdo de la igualdad. ¿Qué sucede después? Para mantener la regularidad anterior, observar los resultados siguientes:

$$\begin{array}{ll} 1234567890 \cdot 9 + 101 & = 11111111111 \\ 12345678901 \cdot 9 + 1002 & = 111111111111 \\ 123456789012 \cdot 9 + 10003 & = 1111111111111 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

¿Cuáles serían los siguientes tres productos - sumas?
¿Qué dan como resultado?
Completar la lista hasta 123456789012345678 por 9.

3) Al continuar con la regularidad anterior, se observa que en el paso siguiente se debe sumar un número que cambia el orden obtenido hasta el paso anterior.
De hecho, el producto siguiente en la regularidad anterior es:

$$1234567890123456789 \cdot 9 + 100000000010 = 11111111111111111111$$

(al lado izquierdo de la igualdad, el número que se suma al producto por 9 tiene sólo 9 ceros antes del siguiente 1, pero igual se obtiene como resultado el número de 20 dígitos donde todos son 1).

Completar la lista para obtener como resultados números de 21, 22, 23, ... dígitos y todos iguales a 1.

4) Se puede ver que todos los resultados obtenidos en las curiosidades anteriores, se pueden escribir usando potencias de 10.

Es decir:

$$\begin{array}{ll} 0 \cdot 9 + 1 & = 1 = 10^0 \\ 1 \cdot 9 + 2 & = 11 = 10^1 + 10^0 \\ 12 \cdot 9 + 3 & = 111 = 10^2 + 10^1 + 10^0 \\ 123 \cdot 9 + 4 & = 1111 = 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 \end{array}$$

Comprobar que se cumple la regularidad en los cinco productos - sumas siguientes.

1) ¿Podemos calcular y comparar?
¿Son iguales ambas expresiones en cada caso?

Se sabe que 1^3 es igual a 1^2.

Comparar el resultado obtenido para cada expresión:

a) $1^3 + 2^3$ con $(1 + 2)^2$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3$ con $(1 + 2 + 3)^2$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ con $(1 + 2 + 3 + 4)^2$

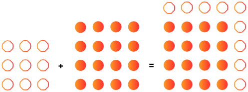
Comparar las sumas hasta 5 , hasta 6 , hasta 7.
Obtener una generalización de esta curiosidad.

2) Los Tríos Pitagóricos son ternas de números naturales tales que la suma de los cuadrados de dos de ellos es igual al cuadrado del tercer número.

Estas igualdades se pueden verificar gráficamente.
A modo de ejemplo:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

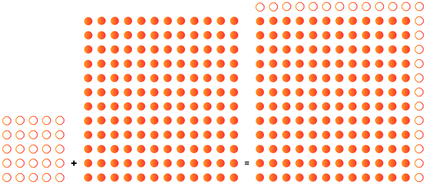
Gráficamente:



De igual modo:

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

Gráficamente:



Comprobar que son tríos pitagóricos:
7, 24, 25 ; 8, 15, 17 ; 12, 35, 37.

3) La siguiente propiedad es válida en el conjunto de los números enteros:

Propiedad:
Un número entero impar se puede expresar como la diferencia de enteros consecutivos al cuadrado.

Por ejemplo:

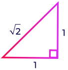
$1 = 1^2 - 0^2$, $\quad -1 = 0^2 - 1^2$, $\quad 3 = 2^2 - 1^2$, $\quad -3 = 1^2 - 2^2$

Expresar -5 y 5 como diferencia de enteros consecutivos al cuadrado.
¿Se puede dar una fórmula para estas igualdades?
¿Se puede verificar formalmente la curiosidad dada?

El Espiral de Teodoro de Cirene es una figura con forma de espiral, que se inicia con un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1 y continúa con otros triángulos rectángulos construidos sobre la hipotenusa de los triángulos construidos antes.

Primera figura:

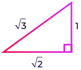
Triángulo rectángulo isósceles de cateto 1:



En esta figura, si los catetos miden 1 unidad entonces la hipotenusa mide $\sqrt{2}$.

Segunda figura:

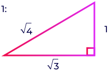
Triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ y 1:



En esta figura, si los catetos miden 1 y $\sqrt{2}$ entonces la hipotenusa mide $\sqrt{3}$.

Tercera figura:

Triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{3}$ y 1:



En esta figura, si los catetos miden 1 y $\sqrt{3}$ entonces la hipotenusa mide $\sqrt{4}$.

Construir las tres figuras siguientes.
Verificarlo gráficamente.

De igual modo, se continúa construyendo la figura n, que es el triángulo rectángulo de catetos 1 y $\sqrt{n}$, y cuya hipotenusa mide $\sqrt{n+1}$.

Luego, el cateto mayor de la segunda figura se ubica en la hipotenusa de la primera figura, el cateto mayor de la tercera figura se ubica en la hipotenusa de la segunda, y así sucesivamente hasta obtener la Espiral de Teodoro.

Construir (dibujar) la Espiral de Teodoro.

Curiosidades:

1) El misterio del ángulo completo.
Al dividir la medida de un ángulo completo (360°) en sucesivas mitades, los ángulos obtenidos son números tales que, al sumar sus cifras, el resultado es 9.
A modo de ejemplo:

$360 : 2 = 180$ y $1 + 8 + 0 = 9$
$180 : 2 = 90$ y $9 + 0 = 9$
$90 : 2 = 45$ y $4 + 5 = 9$
$45 : 2 = 22{,}5$ y $2 + 2 + 5 = 9$

Completar con los tres ángulos siguientes.

2) La omnipresencia temporal del número 9.

- Hay 1.440 minutos en un día y $1 + 4 + 4 + 0 = 9$
- Hay 86.400 segundos en un día y $8 + 6 + 4 + 0 + 0 = 18$ y $1 + 8 = 9$
- Hay 10.080 minutos en una semana y $1 + 0 + 0 + 8 + 0 = 9$
- Hay 525.600 minutos en un año y $5 + 2 + 5 + 6 + 0 + 0 = 18$ y $1 + 8 = 9$

Resulta que minutos y segundos en un día, semana, mes, año, siempre se va a reducir numéricamente a 9.

¿Parece que el número 9 “gobierna el tiempo”?

3) La curiosidad de la tabla del 9.

Si se observa la tabla de multiplicar del 9, los resultados entregan una gran curiosidad. Al analizar la tabla del 9:

$9 \cdot 1 = 9$ y $0 + 9 = 9$
$9 \cdot 2 = 18$ y $1 + 8 = 9$
$9 \cdot 3 = 27$ y $2 + 7 = 9$
$9 \cdot 4 = 36$ y $3 + 6 = 9$
$9 \cdot 5 = 45$ y $4 + 5 = 9$

Verificar con los siguientes productos hasta llegar al factor 10.

4) ¿Sabían que, al elegir un número cualquiera y multiplicarlo por 9, luego de sumar los dígitos del resultado las veces que sea necesario hasta llegar a un resultado de un dígito, ese dígito siempre es 9?

Por ejemplo:
- Al elegir el número 42 : $42 \cdot 9 = 378$ y $3 + 7 + 8 = 18$ y $1 + 8 = 9$
- Al elegir el número 721 : $721 \cdot 9 = 6489$ y $6 + 4 + 8 + 9 = 27$ y $2 + 7 = 9$

En general, lo anterior ocurre sin importar la cantidad de dígitos que tenga el número elegido.

Probar con un número de cinco dígitos y uno de seis dígitos.

5) Dado un número de n dígitos, al dividirlo por un número con n nueves, el resultado es un decimal infinito periódico y el periodo es el número elegido.

Por ejemplo:
- Al dividir 43 por 99 da:

$$43 : 99 = 0{,}4343434343... = 0{,}\overline{43}$$

- Al dividir 768 por 999 da:

$$768 : 999 = 0{,}768768... = 0{,}\overline{768}$$

Se sugiere probar con el número 84623.

6) Al elegir un número de n dígitos donde todos son 9 salvo uno de ellos distinto de cero (sin importar su posición dentro del número), al sumar sus dígitos (y seguir sumando los dígitos de los distintos resultados hasta llegar sólo a un dígito), se obtiene como resultado el único digito distinto de 9 del número original.

Por ejemplo:
- Al elegir el número 9959, se obtiene:

$$9 + 9 + 5 + 9 = 32 \quad \text{y} \quad 3 + 2 = 5$$

- Al elegir el número 19999, se obtiene:

$$1 + 9 + 9 + 9 + 9 = 37 \quad \text{y} \quad 3 + 7 = 10 \quad \text{y} \quad 1 + 0 = 1$$

Probar con el número de siete dígitos 9999993.

7) El número 12345679 y el 9
Al multiplicar el número 12345679 por cualquier digito elegido entre 1 y 9, y el resultado se multiplica por 9, se obtiene un número de 9 dígitos donde todos sus dígitos son el número elegido inicialmente.

Por ejemplo:
- Si se elije el número 4 y lo multiplicamos por 12345679, se obtiene:

$$12345679 \cdot 4 = 49382716$$

- Luego, al multiplicar este resultado por 9, se obtiene:

$$49382716 \cdot 9 = 444444444$$

Probar eligiendo inicialmente el 7.

8) El resto obtenido al dividir un número por 9.
Al elegir un número de n dígitos (excepto un múltiplo de nueve) y al dividirlo por 9, se obtiene un resto que resulta ser igual a la suma de los dígitos del número elegido (dividendo), sumando tantas veces los resultados hasta llegar a un dígito.

Por ejemplo:
- Al elegir el número 82 y dividirlo por 9, el cociente es 9 y el resto es 1.
  Aquí: $8 + 2 = 10$ y $1 + 0 = 1$
- Al elegir el número 127 y dividirlo por 9, el cociente es 14 y el resto es 1.
  Aquí: $1 + 2 + 7 = 10$ y $1 + 0 = 1$

Verificar esta curiosidad con 1248 y el 4201.

9) Suma de dígitos con igual resultado.
Al elegir un número de n dígitos y sumarle 9, se obtiene un resultado que, al sumar sus dígitos tantas veces como sea necesario hasta obtener una cifra, el resultado coincide con la suma de los dígitos del número elegido inicialmente.

Por ejemplo:
- Al elegir el número 422, se obtiene:
  $422 + 9 = 431$; $4 + 3 + 1 = 8$ y $4 + 2 + 2 = 8$
- Al elegir el número 711, se obtiene:
  $711 + 9 = 720$; $7 + 2 + 0 = 9$ y $7 + 1 + 1 = 9$

Aplicar éste procedimiento al número 4563.

10) La diferencia positiva entre un número con otro invirtiendo los dígitos del primero da un múltiplo de 9.
Dado un número de n dígitos distintos ($n \geq 2$) y al invertir sus dígitos, se obtiene un segundo número tal que, al restar el mayor del menor entre los dos, el resultado es un múltiplo de 9.

Por ejemplo: al elegir el 4172:
Al invertir sus dígitos se obtiene 2714
Al restar: $4172 - 2714 = 1458$ y $1458 = 9 \cdot 162$ (es decir, 1458 es múltiplo de 9)

Probarlo con el número 56291.

11) Generalización de la curiosidad anterior.
Al elegir un número de n dígitos y al formar un segundo número con los mismos dígitos y en cualquier orden, al restar el mayor de menor, el resultado es múltiplo de 9.

Por ejemplo, al elegir el número 710487:
- Al formar el 408177 (por ejemplo), se obtiene:
  $710487 - 408177 = 302310$ y $302310 = 9 \cdot 33590$ (es decir, es múltiplo de 9)
- Al formar el 048177 (por ejemplo), se obtiene:
  $710487 - 048177 = 662310$ y $662310 = 9 \cdot 73590$ (es decir, es múltiplo de 9)
- Al formar el 804177 (por ejemplo), se obtiene:
  $804177 - 710487 = 93690$ y $93690 = 9 \cdot 10410$ (es decir, es múltiplo de 9)

Aplicarlo al número 987654321.

12) Dado un número cualquiera, al restarle la suma de sus dígitos el resultado es múltiplo de 9.

Por ejemplo:
al elegir el número 7291, se obtiene:
7 + 2 + 9 + 1 = 19 ; 7291 − 19 = 7272 y 7272 = 9 · 808

Probar esta curiosidad con el número 85634.

13) Si al número 9 se le suma un número del 1 al 10 y se suman los dígitos del resultado, se obtiene el mismo número que se sumó al 9.

Por ejemplo: al elegir el número 5 , se obtiene:
9 + 5 = 14 y 1 + 4 = 5

Verificar la curiosidad dada con el número 7. ¿Se puede generalizar para cualquier número?

14) Multiplicación de un número compuesto sólo de nueves por cualquier número. Si se multiplica un número de n dígitos por otro número de n dígitos formados sólo de nueves entonces el resultado es un número de 2n dígitos donde los n primeros corresponden al número original menos 1 y los otros n dígitos corresponde al complemento a nueves del número original, más 1.

Por ejemplo:
Al elegir el número 11
Al multiplicarlo por 99, se obtiene: 11 · 99 = 1089
Otra forma de obtener este resultado: 11 − 1 = 10 y el complemento a nueves de 11 más 1 es 88 + 1 = 89. Luego, el resultado es: 1089

Al elegir el número 135
Al multiplicarlo por 999, se obtiene: 135 · 999 = 134865
Otra forma de obtener este resultado: 135 − 1 = 134 y el complemento a nueves de 135 más 1 es 864 + 1 = 865. Luego, el resultado es: 134865

Verificar que la curiosidad se cumple para el número 759328.

15) Multiplicación de un número de n dígitos sólo de nueves por cualquier dígito del 1 al 9. Esta curiosidad permite obtener el resultado del producto de manera muy rápida. Algunos ejemplos:

9 · 2 = 18
99 · 2 = 198
99 · 3 = 297
999 · 4 = 3996
999 · 5 = 4995
99999 · 8 = 799992

Obtener el producto entre 9999 y 7 ; entre 99999 y 6 ; entre 999999 y 3.

¿Y si se multiplica un número de n dígitos sólo de nueves por números mayores que 10?

16) División de un número de tres cifras por 9.
Observar lo que ocurre cuando se realiza esta operación.

Por ejemplo:
- Al dividir 421 por 9 se obtiene:

421 : 9 = 46
61
7

Es decir, el cociente es 46 y el resto es 7.

Otra forma:
Para el número 421: se baja el **4**, se suma **4 + 2 = 6** y se suma **4 +2 + 1 = 7**
Con estos tres resultados se forma el número 4**67**, donde 46 es el cociente y **7** es el resto.

- Al dividir 512 por 9 se obtiene:

512 : 9 = 56
62
8

Es decir, el cociente es 56 y el resto es 8.

Otra forma:
Para el número 512: se baja el **5**, se suma **5 + 1 = 6** y se suma **5 +1 + 2 = 8**
Con estos tres dígitos se forma el número **568**, donde 56 es el cociente y **8** es el resto.

Obtener el cociente y el resto al dividir 611 por 9. ¿Qué se obtiene si se divide 786 por 9?

17) División de un número de cinco cifras por 9.
La curiosidad anterior se puede extender también al dividir un número de cinco dígitos por 9. A modo de ejemplo:

Al dividir 36572 por 9, el cociente es 4063 y el resto es 5.

Analizar el caso dado para obtener alguna conclusión sobre lo que se debe hacer.

18) Obtener el producto entre un número compuesto por nueves por cualquier otro número a través de la sustracción.

Algunos ejemplos:

11 · 9 = 99	y	99 = 110 − 11
23 · 9 = 207	y	207 = 230 − 23
45 · 9 = 405	y	405 = 450 − 45
126 · 99 = 12474	y	12474 = 12600 − 126
1354 · 999 = 1352646	y	1352646 = 1354000 − 1354

Generalizar esta curiosidad y demostrarla.

Curiosidades:

1) El número 1089 es un número figurado pues es un número octogonal centrado. El n −ésimo número octogonal centrado se obtiene a través de la fórmula $(2n - 1)^2$. Al reemplazar n por 17, se obtiene $(2 \cdot 17 - 1)^2 = 33^2 = 1089$.

2) Al invertir los dígitos de 1089 se obtiene 9801 y 9801 es un múltiplo de 1089.

3) El doble de 1089 es 2178.
Al invertir los dígitos de 2178 se obtiene 8712 y 8712 es un múltiplo de 2178.

4) Al dividir el número 1 por 1089 se obtiene: $\frac{1}{1089} = 0{,}000918273645546372...$

¿Se observa alguna regularidad en el resultado obtenido?

5) Al cambiar de orden los dígitos de 1089 y dividir el 1 por el nuevo número 9801, se obtiene:

$$\frac{1}{9801} = 0{,}0001020304050607080910 11\ ...$$

¿Hay alguna regularidad en este resultado?

6) Al realizar las multiplicaciones siguientes, se obtiene “un buen orden” entre los dígitos de los distintos resultados (todos los productos son números de cuatro dígitos).

$1089 \cdot 1 =$	1	0	8	9
$1089 \cdot 2 =$				
$1089 \cdot 3 =$				
$1089 \cdot 4 =$				
$1089 \cdot 5 =$				
$1089 \cdot 6 =$				
$1089 \cdot 7 =$				
$1089 \cdot 8 =$				
$1089 \cdot 9 =$				

Observar las regularidades que se dan en las cuatro columnas (la azul, la roja, la verde, la negra).

7) Si se sigue el algoritmo siguiente, se llega siempre al 1089:

a) Elegir un número de tres dígitos, con dígito de la unidad distinto al de la centena (por ejemplo: 123)

b) Formar el número de tres dígitos intercambiando el dígito de la unidad con el dígito de las centenas en el número elegido antes
(en el ejemplo: 321)

c) Al mayor de los dos números anteriores restarle el menor
(en el ejemplo: 321 − 123 = 198)

d) En el resultado obtenido, formar un número intercambiando el dígito de las unidades con el de las centenas
(en el ejemplo: 891)

e) Finalmente, sumar estos dos últimos números
(en el ejemplo: 198 + 891 = 1089)

Probar con otro número de tres dígitos. ¿Se puede dar una demostración formal para esta curiosidad?

¿Se ha escuchado hablar de los números malvados y los números odiosos?

1) Un número malvado es aquel número natural cuya representación en el sistema de numeración en base 2 contiene una cantidad par de unos (1).

Por ejemplo: 15 y 27 son números malvados.
Al escribirlos en base 2 (sistema de numeración binario):

15 : 2 = 7 ; 7 : 2 = 3 ; 3 : 2 = 1
1 1 1

Así: $15 \longrightarrow 1111_2$

27 : 2 = 13 ; 13 : 2 = 6 ; 6 : 2 = 3 ; 3 : 2 = 1
1 1 0 1

Así: $27 \longrightarrow 11011_2$

Comprobar que los números 60 y 147 son números malvados.

2) Un número odioso es todo aquel número natural cuya representación en el sistema de numeración en base 2 contiene una cantidad impar de unos (1).

Por ejemplo: 13 y 25 son números odiosos.
Al escribirlos en base 2 (sistema de numeración binario):

13 : 2 = 6 ; 6 : 2 = 3 ; 3 : 2 = 1
1 0 1

Así: $13 \longrightarrow 1101_2$

25 : 2 = 12 ; 12 : 2 = 6 ; 6 : 2 = 3 ; 3 : 2 = 1
1 0 0 1

Así: $25 \longrightarrow 11001_2$

Verificar que los números 73 y 98 son números odiosos.

Descubrir si un número dado (el favorito de cada uno) es malvado u odioso. ¿Cuáles son los primeros 10 números odiosos?

Los antiguos pitagóricos tienen el crédito del origen de los NÚMEROS FIGURADOS.

Estos números, considerados como el número de puntos espaciados regularmente en ciertas configuraciones geométricas, representan un enlace entre la geometría y la aritmética.

Números Triangulares

Son aquellos números figurados que, al ser representados en el plano a través de puntos espaciados regularmente, forman un triángulo. Se acepta que el 1 es el primer número triangular.

Así, son números triangulares los siguientes:

Propiedad:

Un número natural n es un número triangular, sólo si la expresión 8n + 1 es el cuadrado de algún número natural.

Obtener los cuatro números triangulares siguientes.
¿Se puede obtener una fórmula que entregue el n - ésimo número triangular? Explicar (verificar) la propiedad dada.

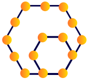
Números Hexagonales

Son aquellos números figurados que, al ser representados en el plano a través de puntos espaciados regularmente, forman un hexágono. Se acepta que el 1 es el primer número hexagonal.

Así, son números hexagonales los siguientes:

1 : 

6 : 

15 : 

Propiedad:

El n –ésimo número hexagonal H_n se puede obtener como el (2n – 1)–ésimo número triangular T_{2n-1} .

Dar los tres números hexagonales siguientes.
Obtener una fórmula que entregue el n - ésimo número hexagonal.
Explicar (verificar) la propiedad dada.

CURIOSO

El Triángulo de Pascal es un arreglo numérico (formado por niveles) en forma de triángulo.

Construcción:

- En el nivel cero: sólo está el 1.
- En el nivel uno: se ubican dos 1.
- Desde el nivel dos en adelante: se inicia con 1, se termina con 1 y los elementos del medio es la suma de los dos números más cercanos del nivel anterior.

De este modo, el Triángulo de Pascal es:

Nivel 0 → 1
Nivel 1 → 1 1
Nivel 2 → 1 2 1
Nivel 3 → 1 3 3 1
Nivel 4 → 1 4 6 4 1
Nivel 5 → 1 5 10 10 5 1
Nivel 6 → 1 6 15 20 15 6 1
Nivel 7 → 1 7 21 35 35 21 7 1
⋮ ⋮ ⋮

Coeficientes binomiales

Sean n, $k \in \mathbb{N}_0$, tales que $n \geq k$.

"El coeficiente binomial n sobre k", denotado por $\binom{n}{k}$, se define como: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

El coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ siempre es un número natural.

Curiosidades:

1) El Triángulo de Pascal se puede escribir utilizando coeficientes binomiales y obedece a un buen orden.

Nivel 0 $\longrightarrow$ $\binom{0}{0}$

Nivel 1 $\longrightarrow$ $\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$

Nivel 2 $\longrightarrow$ $\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$

Nivel 3 $\longrightarrow$ $\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

Nivel 4 $\longrightarrow$ $\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

Nivel 5 $\longrightarrow$ $\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$

Nivel 6 $\longrightarrow$ $\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$

Nivel 7 $\longrightarrow$ $\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

Escribir el nivel 10 usando coeficientes binomiales.

2) El Triángulo de Pascal contiene en el nivel n los coeficientes correspondientes al desarrollo de la n –ésima potencia de (a +b) (es decir, los coeficientes de $(a + b)^n$).

Así, por ejemplo, si n = 3 entonces el desarrollo de $(a + b)^3$ es:

$(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 = 1\, a^3 + 3\, a^2 b + 3\, ab^2 + 1\, b^3$

Escribir el desarrollo de (2x - 3y) elevado a 4.

3) Si en un nivel el segundo número es un número primo entonces todos los números de ese nivel, salvo los extremos, son múltiplos de ese número primo.
Por ejemplo: en el nivel 3, hay sólo múltiplos de 3 (salvo los extremos). Igual en el nivel 5 y 7.

Nivel 0 $\longrightarrow$ 1

Nivel 1 $\longrightarrow$ 1 1

Nivel 2 $\longrightarrow$ 1 2 1

Nivel 3 $\longrightarrow$ 1 3 $\boxed{3}$ 1

Nivel 4 $\longrightarrow$ 1 4 6 4 1

Nivel 5 $\longrightarrow$ 1 5 $\boxed{10 \quad 10 \quad 5}$ 1

Nivel 6 $\longrightarrow$ 1 6 15 20 15 6 1

Nivel 7 $\longrightarrow$ 1 7 $\boxed{21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7}$ 1

⋮ ⋮ ⋮

4) No sólo ocurre que las primeras diagonales son sólo 1 y las segundas diagonales son los números naturales, sino que también las terceras diagonales corresponden a los Números Triangulares.

Nivel 0 $\longrightarrow$ 1

Nivel 1 $\longrightarrow$ 1 1

Nivel 2 $\longrightarrow$ 1 2 1

Nivel 3 $\longrightarrow$ 1 3 3 1

Nivel 4 $\longrightarrow$ 1 4 6 4 1

Nivel 5 $\longrightarrow$ 1 5 10 10 5 1

Nivel 6 $\longrightarrow$ 1 6 15 20 15 6 1

Nivel 7 $\longrightarrow$ 1 7 21 35 35 21 7 1

⋮ ⋮ ⋮

5) En una diagonal cualquiera, al sumar desde el primer número (1) hasta otro cualquiera ubicado en cierto nivel, la suma obtenida se encuentra en el nivel siguiente del último número sumado.

Nivel 0 ⟶	1
Nivel 1 ⟶	1 1
Nivel 2 ⟶	1 2 1
Nivel 3 ⟶	1 3 3 1
Nivel 4 ⟶	1 4 6 4 1
Nivel 5 ⟶	1 5 10 10 5 1
Nivel 6 ⟶	1 6 15 20 15 6 1
Nivel 7 ⟶	1 7 21 35 35 21 7 1
⋮	⋮ ⋮

6) Si se suman todos los números que están en un nivel (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...), se obtiene una secuencia numérica que corresponde a las potencias de 2 con exponente en N_0 (2 elevado al número del nivel).

Nivel 0 ⟶	1	$1 = 2^0$
Nivel 1 ⟶	1 1	$2 = 2^1$
Nivel 2 ⟶	1 2 1	$4 = 2^2$
Nivel 3 ⟶	1 3 3 1	$8 = 2^3$
Nivel 4 ⟶	1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
Nivel 5 ⟶	1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$
Nivel 6 ⟶	1 6 15 20 15 6 1	$64 = 2^6$
Nivel 7 ⟶	1 7 21 35 35 21 7 1	$128 = 2^7$
⋮	⋮ ⋮	

7) En la secuencia numérica correspondiente a los números que se ubican en la vertical al centro del triángulo, si los números del nivel n > 0 se elevan al cuadrado y se suman, entonces ese resultado es el número que se ubica en la posición (n + 1) en la secuencia vertical.

Nivel 0 ⟶ 1
Nivel 1 ⟶ 1 1
Nivel 2 ⟶ 1 2 1
Nivel 3 ⟶ 1 3 3 1
Nivel 4 ⟶ 1 4 6 4 1
Nivel 5 ⟶ 1 5 10 10 5 1
Nivel 6 ⟶ 1 6 15 20 15 6 1
Nivel 7 ⟶ 1 7 21 35 35 21 7 1
⋮ ⋮ ⋮

Por ejemplo:

n = 1 : la suma de los cuadrados de los números del nivel 1 es $1^2 + 1^2 = 2$
(número en la ubicación n + 1 = 2 en la secuencia vertical).

n = 2 : la suma de los cuadrados de los números del nivel 2 es $1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$
(número en la ubicación n + 1 = 3 en la secuencia vertical).

n = 3 : la suma de los cuadrados de los números del nivel 3 es $1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20$
(número en la ubicación n + 1 = 4 en la secuencia vertical).

8) Es posible obtener la Serie de Fibonacci en el Triángulo de Pascal. Basta con sumar, en cada caso, los números que se encuentran en las distintas diagonales que se puedan determinar como se muestra en la figura siguiente:

Nivel 0 ⟶ 1
Nivel 1 ⟶ 1 1
Nivel 2 ⟶ 1 2 1
Nivel 3 ⟶ 1 3 3 1
Nivel 4 ⟶ 1 4 6 4 1
Nivel 5 ⟶ 1 5 10 10 5 1
Nivel 6 ⟶ 1 6 15 20 15 6 1
Nivel 7 ⟶ 1 7 21 35 35 21 7 1
⋮ ⋮ ⋮

Realizando algo de operatoria básica, se puede "adivinar" la edad de una persona y dejar a todos sorprendidos.

Procedimiento:

1) Solicitemos a cualquier persona que, sin decir su edad, la multiplique por 10. A modo de ejemplo, supongamos que la edad es 31.
   Luego: $31 \cdot 10 = 310$.

2) Ahora, solicitemos que multiplique el número de hermanos que tiene por 9. En el ejemplo, consideremos que tiene 3 hermanos: $9 \cdot 3 = 27$.

3) Al resultado obtenido en el primer paso, se le resta el resultado del segundo paso. En el ejemplo: $310 - 27 = 283$.

4) Se solicita a la persona que nos diga solamente el último número obtenido. En el ejemplo, el número es: 283.

5) Al número formado por los dos primeros dígitos (dígito de las centenas y de las decenas) se le suma el dígito de las unidades. ¡Y esa es la edad de la persona! En el ejemplo, $28 + 3 = 31$.

¡MAGIA! Se ha adivinado la edad de la persona.

Probar con los siguientes datos: 52 años y 2 hermanos. ¿Se puede explicar por qué funciona este algoritmo para esta curiosidad?

¡Cómo impresionar a los amigos!

Antes de iniciar el juego, se elige un número entre 20000 y 30000, se anota en un papel y se guarda sin que se conozca, indicando que se obtendrá este número con los pasos que seguirán.

En nuestro caso, a modo de ejemplo, el número será 27836.

Ahora comienza el juego:

1) Conociendo el número del papel, se propone un número de cuatro dígitos donde los tres primeros son los dígitos centrales del número escrito en el papel y cuyo cuarto dígito (el de las unidades) es el dígito de las unidades del número escrito en el papel, más dos.
   De acuerdo al ejemplo, el número será: 7838.

2) Se solicita al amigo que elija un número de cuatro cifras cualquiera. Siguiendo con el ejemplo, supongamos que el número elegido es 5392.

3) Ahora, se propone el complemento a nueves del número dado por el amigo. En el ejemplo: 9999 − 5392 = 4607.

4) Se solicita al amigo que elija otro número de cuatro cifras cualquiera. En el ejemplo, supongamos que el número es 8264.

5) Ahora, se propone el complemento a nueves del segundo número dado por el amigo.
   En el ejemplo: 9999 − 8264 = 1735.

6) Finalmente, si se suman los cinco números de cuatro dígitos de los pasos 1), 2), 3), 4) y 5), el resultado será el número de cinco dígitos escrito al inicio en el papel.
   En el ejemplo: 7838 + 5392 + 4607 + 8264 + 1735 = 27836.

¡SORPRESA! Es el número que se había “escondido” inicialmente en el papel.

Probar con el número 21639.
Realizar el procedimiento para un número con 6 dígitos que esté entre 200.000 y 300.000.
Verificar el algoritmo en general .

SOLUCIONARIO

RESPUESTAS A DESAFÍOS Y PREGUNTAS HECHAS EN LAS DISTINTAS PARTES DEL LIBRO

SE SUGIERE NO REVISAR ESTA PARTE ANTES DE INTENTARLO

I Sumando los primeros números naturales

$$1+2+3+4+5=\frac{5\cdot 6}{2}=15\ .$$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\ ,\quad \text{con } n\in\mathbb{N}\ .$$

II Sumando los primeros números naturales: La historia de Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss nació en el Ducado de Brunswick, en la ciudad de Braunschweig, Alemania, el 30 de abril de 1777. Fue matemático, físico y astrónomo, cuyo aporte estuvo en la Teoría de Números, el Álgebra, el Análisis Matemático, la Estadística, la Geometría Diferencial, la Geodesia, la Óptica y el Magnetismo.

Durante su productiva vida, se pueden destacar:

- A los 3 años, como niño prodigio que era, revisaba las cuentas de su padre, donde detectó algún error que éste había cometido.

- A los 9 años resolvió en pocos minutos la suma de los 100 primeros números naturales que su maestro rural Buttner le puso a la clase para “mantenerlos ocupados”. De su forma de razonar nace la fórmula (n(n+1))/2 que permite obtener la suma de los primeros n números naturales.

- A los 14 años el Duque de Brunswick decide apoyarlo económicamente para que continúe sus estudios en el Collegium Carolinum, escuela de élite. Después de tres años allí, no sabía si seguir estudios en matemática o filosofía, siendo que ya había descubierto su Ley de los Mínimos Cuadrados.

- A los 18 años dedicó su tiempo a completar lo que, desde su punto de vista, estaba incompleto en Teoría de Números. Su gusto por esta rama de la matemática lo llevo a decir que “la matemática es la reina de las ciencias y la Teoría de Números es la reina de las matemáticas”.

- A los 19 años demostró que se puede dibujar un polígono regular de 17 lados usando sólo regla y compás.

- Ese año (1796) comenzó a escribir apuntes sobre sus descubrimientos, cuya primera nota era el resultado anterior. Este documento, de sólo 19 páginas, tiene los enunciados de 146 resultados, algunos de los cuales aún no son demostrados. La primera nota la hizo en 1796 y la última que aparece escrita tiene fecha 9 de julio de 1814. Es uno de los documentos más importantes de la matemática.

- Uno de los resultados que se leen en sus apuntes es: “Todo número entero positivo puede expresarse como suma de, como mucho, tres números triangulares”.
  Por ello, escribió:
  

- A los 22 años demostró el Teorema Fundamental del Álgebra, trabajo que formó parte de su Tesis Doctoral en el año 1799.

- A los 24 años publicó su libro Disquisitiones arithmeticae, hito en su vida pues era muy perfeccionista, lo que hacía que sus publicaciones fueran completas, concretas y muy elegantes. Tal vez por ello no publicaba tanto como hubiese podido. Siempre se guio por el lema "Pauca sed matura", es decir, "Poco, pero maduro"

- A los 32 años fue nombrado Director del Observatorio de Gottingen, puesto en el que se mantuvo el resto de su vida.

- Este mismo año publicó Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium, donde muestra la forma de calcular la órbita de un planeta. Actualmente se han adaptado para el uso en aplicaciones de computadores.

- De igual modo, comenzó a utilizar la agrimensura en Hannover.

- Estudió la electricidad y el magnetismo, obteniendo el telégrafo como consecuencia de sus estudios.

- Descubrió un cuerpo celeste que le llamó Ceres. Además, observó que, si dibujaba la posición real de Ceres en el espacio, se obtenía una gráfica con forma de campana, actualmente llamada “Campana de Gauss” (Función Gaussiana). Es muy utilizada en Estadística como la “Curva Normal”.

- A los 58 años formula la Ley de Gauss (Teorema de Gauss), una de sus mayores contribuciones al electromagnetismo.

- Es usado su nombre:
  En Matemática: La distribución de Gauss (o distribución normal), la Campana de Gauss (o función gaussiana o curva de Gauss), el Teorema de la Divergencia (o Teorema de Gauss o Teorema de Gauss- Ostrogradsky), el Teorema de Gauss-Bonnet, La Cuadratura de Gauss, la Eliminación de Gauss-Jordan
  En Física: La ley de Gauss, el Sistema Gauss-Krüger.

- Se usa su apellido:
  En Matemática: Premio Carl Friedrich Gauss (entregado cada cuatro años por la Unión Matemática Internacional).
  En Física: Un Gauss (como unidad de medida de campo magnético), el cañón Gauss (a base de electroimanes), el asteroide Gaussia (1001).
  Otros: Lenguaje de programación Gauss, la Expedición Gauss (la primera expedición alemana a la Antártida), el barco Gauss (donde viajó la expedición a la Antártida), la Torre Gauss (torre de observación en Alemania), el cráter lunar Gauss.

Gauss fallece en Gottingen el 23 de febrero de 1855, a los 77 años. Su legado es tan grande que el Rey Jorge V de Hannover lo nombró “El Príncipe de las Matemáticas”.

III Aprendiendo a multiplicar

1) Forma tradicional

$$\begin{array}{r} \underline{123} \cdot 412 \\ \underline{246} \\ + \quad 123 \\ \underline{492} \\ 50676 \end{array}$$

2) Descomponiendo el multiplicador

El multiplicador es: $412 = 400 + 10 + 2$.

Luego: $123 \cdot 412 = 123 \cdot (400 + 10 + 2) = 49200 + 1230 + 246 = 50676$.

3) Descomponiendo ambos números y usando un arreglo (array)

$123 = 100 + 20 + 3$, $412 = 400 + 10 + 2$

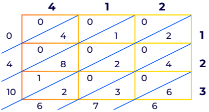
Luego:

	100	20	3
400	40000	8000	1200
10	1000	200	30
2	200	40	6

Por lo tanto:

$123 \cdot 412 = 40000 + 8000 + 1200 + 1000 + 200 + 30 + 200 + 40 + 6 = 50676$.

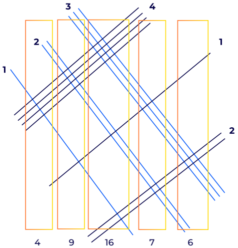
4) Usando el método hindú



Dígito de las unidades : es 6
Dígito de las decenas : es 7
Dígito de las centenas : es 6
Dígito de las unidades de mil : es 0
Dígito de las decenas de mil : 4 + 1 = 5 , luego es 5

Por lo tanto, el resultado es : 123 · 412 = 50676

5) Método japonés (o Maya): Usando el método gráfico



Dígito de las unidades : es 6
Dígito de las decenas : es 7
Dígito de las centenas : es 6
Dígito de las unidades de mil : 9 + 1 = 10 , luego es 0
Dígito de las decenas de mil : 4 + 1 = 5 , luego es 5

Por lo tanto, el resultado es : 123 · 412 = 50676

6) Método Ruso

Multiplicando	Multiplicador	¿Se suma?
123	**412**	**si**
61	**824**	**si**
30	**1648**	**no**
15	**3296**	**si**
7	**6592**	**si**
3	**13184**	**si**
1	**26368**	**si**

Por lo tanto, el resultado es:

123 · 412 = 412 + 824 + 3296 + 6592 + 13184 + 26368 = 50676

IV | Multiplicando por 9 y sumando un natural

1)
1234 · 9 + 5 = 11111

12345 · 9 + 6 = 111111
123456 · 9 + 7 = 1111111
1234567 · 9 + 8 = 11111111
12345678 · 9 + 9 = 111111111
123456789 · 9 + 10 = 1111111111

2)
1234567890123 · 9 + 100004 = 11111111111111

12345678901234 · 9 + 1000005 = 111111111111111
123456789012345 · 9 + 10000006 = 1111111111111111
1234567890123456 · 9 + 100000007 = 11111111111111111
12345678901234567 · 9 + 1000000008 = 111111111111111111
123456789012345678 · 9 + 10000000009 = 1111111111111111111

3)
12345678901234567890 · 9 + 1000000000101 = 111111111111111111111
123456789012345678901 · 9 + 10000000001002 = 1111111111111111111111
1234567890123456789012 · 9 + 100000000010003 = 11111111111111111111111
12345678901234567890123 · 9 + 1000000000100004 = 111111111111111111111111
123456789012345678901234 · 9 + 10000000001000005 = 1111111111111111111111111

V | Curiosidades con la adición de números naturales al cuadrado

1) Si observamos los resultados obtenidos al lado izquierdo de la igualdad hasta el 1^3, hasta el 2^3, hasta el 3^3, y así sucesivamente, nos damos cuenta que:

$1^3 = 1 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Luego, se puede concluir que, para cierto con $n \in \mathbb{N}$. , se cumple que:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

2) a, b, $c \in \mathbb{N}$ es un Trío Pitagórico si se cumple la igualdad: $a^2 + b^2 = c^2$.

Son también Tríos Pitagóricos los siguientes:

$9^2 + 40^2 = 41^2$, $11^2 + 60^2 = 61^2$, $13^2 + 84^2 = 85^2$

$16^2 + 63^2 = 65^2$, $20^2 + 99^2 = 101^2$, $24^2 + 143^2 = 145^2$

$44^2 + 483^2 = 485^2$, $25^2 + 312^2 = 313^2$, $60^2 + 899^2 = 901^2$

3) **a)** $-5 = 2^2 - 3^2$; $5 = 3^2 - 2^2$

b) Verificación de la propiedad:

- Supongamos que n es un número entero que se puede escribir como la diferencia de enteros consecutivos al cuadrado, esto es: $n = x^2 - (x - 1)^2$
  Luego: $n = x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - 1$
  Lo que significa que n es un número entero impar.

- Por otro lado, si n es un número entero impar entonces es de la forma:
  $n = 2x - 1 \longrightarrow x = \frac{n+1}{2}$

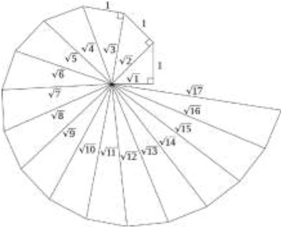
  De este modo: $n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)^2$.

  Es decir, n se puede escribir como la diferencia de enteros consecutivos al cuadrado.

c) Fórmula para estas igualdades:
Si n es un número impar entonces: $n = 2x - 1 = x^2 - (x - 1)^2$
(para x = ... ,−5,−4,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...) .

VI | Triángulos y Raíces cuadradas: El Espiral de Teodoro

Espiral de Teodoro de Cirene:



VII | El espectacular y asombroso número 9

1) 22,5: 2 = 11,25 y 1 + 1 + 2 + 5 = 9
11,25: 2 = 5,625 y 5 + 6 + 2 + 5 = 18 y 1 + 8 = 9

3) 9 · 6 = 54 y 5 + 4 = 9
9 · 7 = 63 y 6 + 3 = 9
9 · 8 = 72 y 7 + 2 = 9
9 · 9 = 81 y 8 + 1 = 9
9 · 10 = 90 y 9 + 0 = 9

4) 47283 · 9 = 425547 y 4 + 2+ 5 +5 + 4 +7 = 27 y 2 + 7 = 9
658429 · 9 = 5925861 y 5 + 9+ 2 +5 + 8 +6 + 1 = 36 y 3 + 6 = 9

5) 84623 : 99999 = 0,846238462384623. . . . .= $0,\overline{84623}$

6) 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 3 = 57 y 5 + 7 = 12 y 1 + 2 = 3

7) 12345679 · 7 = 86419753
y, luego, al multiplicar este resultado por 9, se obtiene: 86419753 · 9 = 777777777 .

8) 1248: 9 = 138, el cociente es 138 y el resto es 6
Aquí: 1 + 2 + 4 + 8 = 15 y 1 + 5 = 6

4201: 9 = 466, el cociente es 466 y el resto es 7
Aquí: 4 + 2 + 0 + 1 = 7

9) 4563 + 9 = 4572
4 + 5 + 6 + 3 = 18 y 1 + 8 = 9
4 + 5 + 7 + 2 = 18 y 1 + 8 = 9

10) Consideremos el número 56291
Al invertir los dígitos se obtiene 19265
Al restar: 56291 − 19265 = 37026 y 37026 = 9 · 4114 (es decir, 37026 es múltiplo de 9).

11) 987654321
Al cambiar de orden los dígitos, se obtiene, por ejemplo: 192837465
Al restar: 987654321 − 192837465 = 794816856 y 794816856 = 9 · 88312984 (es decir, 794816856 es múltiplo de 9).

12) 85634 − 26 = 85608 y 85608 es múltiplo de 9 pues 9512·9 = 85608

13) 9+7=16 y 1+6=7

Para cualquier número no resulta esta propiedad.
Sin embargo, lo que se observa es que la suma de los dígitos del resultado de la suma es igual a la suma de los dígitos del número que se sumó al 9.
Por ejemplo:

9 + 25= 34 y 3 + 4 = 7 (distinto de 25), pero 2 + 5 = 3 + 4
9 + 148= 157 y 1 + 5 + 7 = 13 (distinto de 148), pero 1 + 4 + 8 = 1 + 5 + 7

14) 759328 · 999999 = 759327240672
759328 − 1 = 759327
999999 − 759328 = 240671
240671 + 1 = 240672
Luego, el resultado es: 759327240672

15) 9999 · 7 = 69993
99999 · 6 = 599994
999999 · 3 = 2999997
¿Qué sucede cuando se multiplica el número de n dígitos sólo de nueves por números mayores que 10?

El resultado es un número de 2n dígitos donde los n primeros corresponden al número original menos 1 y los otros n dígitos corresponde al complemento a nueves del número original más 1. Por ejemplo: 99·23 = 2277.
Esto sucede si ambos números tienen la misma cantidad de dígitos.

Ahora si analizamos cuando los números tienen distinta cantidad de dígitos (como, por ejemplo, 999 · 3456 = 3452544), si la cantidad de dígitos en el número compuesto por nueves es menor entonces no se observa regularidad.

Cuando la cantidad de dígitos del número compuesto por nueves es mayor, se observa que el resultado es un número de 2n dígitos donde los n primeros corresponden al número original menos 1 y los últimos n dígitos corresponde al complemento a nueves del número original más 1, y al centro del resultado van tantos nueves como la diferencia entre la cantidad de dígitos de ambos números.
Por ejemplo:

99999·3456=345596544 (números de 5 y 4 dígitos, respectivamente).
9999999·3456=34559996544 (números de 7 y 4 dígitos, respectivamente).

16) 611 : 9 es 67 con resto 8 y 6+ 1 + 1 = 8
786 : 9 es 87 con resto 3 y 7+ 8 + 6 = 21 y 2 + 1 = 3

17) Al dividir 36572 por 9, el cociente es 4063 y el resto es 5.
3+ 6 +5 + 7+ 2 = 23 y 2 + 3 = 5
Se observa que, para cualquier número de n dígitos, al dividirlo por 9, el resto siempre es la suma de los dígitos del número original (si la suma da un número de dos o más dígitos, se continúan sumando los resultados hasta que quede en un solo dígito).

Además, para obtener el cociente: se baja el primer digito (en este caso es 3), luego se suman los dos primeros dígitos (da 9), luego se suman los tres primeros dígitos (da 14, se pone el 4 y el 1 se suma al dígito anterior 9 que, con ello da 10, por lo que se pone un 0 y el 1 se agrega al dígito anterior 3) , se suman los cuatro primeros dígitos (da 21, se pone el 1 y el 2 se le suma al dígito anterior 4), luego se suman los cinco dígitos (que da 23, se pone el 3 y se suma 2 al dígito anterior 1).

18) Demostración
Sea x = 999. . . . . . . .9 un número de n dígitos todos nueves, sea k un número cualquiera.
Luego:
k · x = k · (999 ... 9 + 1 − 1)
= k · (1000 ... 0 − 1) (donde: 1000 ... 0 = 999 ... 9+ 1 , con n ceros)
= (1000 ... 0) · k − k (aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición).

VIII | Números curiosos 1089

4) Al separar las cifras decimales de dos en dos dígitos se obtienen los resultados obtenidos en la tabla de multiplicar del 9.

5) Al separar las cifras decimales de dos en dos dígitos se obtienen los primeros números naturales.

6) - En la columna de los dígitos de las unidades de mil se obtiene la secuencia:
1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 (es decir, los dígitos de 1 al 9).
- En la columna de los dígitos de las centenas se obtiene la secuencia:
0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 (es decir, los dígitos de 0 al 8).
- En la columna de los dígitos de las decenas se obtiene la secuencia:
8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0 (es decir, los dígitos descendientes de 8 al 0).
- En la columna de los dígitos de las unidades se obtiene la secuencia:
9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 (es decir, los dígitos descendientes de 9 al 1).

7) Supongamos que a, b, c son los dígitos de las centenas, decenas y unidades del número elegido.
Luego, el número se puede expresar por:

$$100a + 10b + c$$

con $a \neq c$ (pues al inicio se pide "con dígito de la unidad distinto al de la centena").
Al invertir los dígitos, se obtiene el nuevo número expresado por:

$$100c + 10b + a$$

Si suponemos que, por ejemplo, $a > c$ entonces el primer número es mayor que el segundo.
Así, al restar el menor al mayor, se obtiene:

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$$

Luego:
<u>Primera forma:</u>

Como $a > c$, se concluye que $a - c > 0$ y, de ese modo, puede ser igual a cualquier dígito de 1 a 9 (salvo 1 pues $99 \cdot 1 = 99$ y no es un número de tres cifras).

Por lo tanto, la diferencia entre el mayor y el menor $99(a - c)$ puede ser cualquiera de los números siguientes:

$99 \cdot 2 = 198$, $99 \cdot 3 = 297$, $99 \cdot 4 = 396$, $99 \cdot 5 = 495$
$99 \cdot 6 = 594$, $99 \cdot 7 = 693$, $99 \cdot 8 = 792$, $99 \cdot 9 = 891$

Finalmente, si con cualquiera de estos ocho números se obtiene otro invirtiendo sus dígitos y el nuevo número se suma al número original, se obtiene como resultado 1089.

Segunda forma:

Como $a > c$, se concluye que $0 < a - c \leq 9$ y, de ese modo, puede ser igual a cualquier dígito de 1 a 9 (salvo 1 pues $99 \cdot 1 = 99$ y no es un número de tres cifras).
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 99(a - c) &= 100(a - c) - (a - c) = 100(a - c - 1) + 100 - (a - c) \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + 10 - (a - c) \\ &= 100(a - c - 1) + 10 \cdot 9 + [10 - (a - c)] \end{aligned}$$

Como $0 < a - c \leq 9$, se cumple que $1 \leq 10 - (a - c) < 10$.
De ese modo, $10 - (a - c)$ es el dígito de las unidades del número $99(a - c)$.
Por lo tanto, al invertir los dígitos de este número, se obtiene:

$$100[10 - (a - c)] + 10 \cdot 9 + (a - c - 1)$$

Al sumar $99(a - c)$ con el número $100[10 - (a - c)] + 10 \cdot 9 + (a - c - 1)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} & 99(a - c) + 100[10 - (a - c)] + 10 \cdot 9 + (a - c - 1) \\ &= 100(a - c - 1) + 10 \cdot 9 + [10 - (a - c)] + 100[10 - (a - c)] + 10 \cdot 9 + (a - c - 1) \\ &= 100[(a - c - 1) + (10 - (a - c))] + 10 \cdot (9 + 9) + [10 - (a - c)] + (a - c - 1) \\ &= 100[9] + 10 \cdot (18) + [9] \\ &= 100[9] + 100 + 10 \cdot 8 + [9] \\ &= 100[10] + 10 \cdot 8 + [9] \\ &= 1000 \cdot 1 + 100 \cdot 0 + 10 \cdot 8 + [9] = 1089 \end{aligned}$$

NOTA:
Si se elige inicialmente el número 102 (o 201), al terminar el procedimiento indicado da como resultado 189 y no 1089.

Sin embargo:
- Si se invierten los dígitos en 189 para obtener 981 y ambos números se suman, da 1089
- También: si se considera el 99 como 099 y se invierten sus dígitos para obtener 990, la suma entre 099 y 990 también da 1089.

IX | Números Malvados y Números Odiosos

1) Los números 60 y 147 son números malvados.

$60 : 2 = 30$; $30 : 2 = 15$; $15 : 2 = 7$; $7 : 2 = 3$; $3 : 2 = 1$

0 0 1 1 1

Así: $60 \longrightarrow 111100_2$

$147 : 2 = 73$; $73 : 2 = 36$; $36 : 2 = 18$; $18 : 2 = 9$; $9 : 2 = 4$; $4 : 2 = 2$; $2 : 2 = 1$

1 1 0 0 1 0 0

Así: $147 \longrightarrow 10010011_2$

Luego, ambos son números malvados pues contienen una cantidad par de unos en su representación en base 2.

2) Los números 73 y 98 son números odiosos.

Esto pues: $73 \longrightarrow 1001001_2$; $98 \longrightarrow 1100010_2$

Luego, ambos son números odiosos pues contienen una cantidad impar de unos en su representación en base 2.

3) Los primeros 10 números odiosos son: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 19 .

Lo anterior pues:

$1 \longrightarrow 1_2$; $2 \longrightarrow 10_2$; $4 \longrightarrow 100_2$; $7 \longrightarrow 111_2$; $8 \longrightarrow 1000_2$

$11 \longrightarrow 1011_2$; $13 \longrightarrow 1101_2$; $14 \longrightarrow 1110_2$; $16 \longrightarrow 10000_2$; $19 \longrightarrow 10011_2$

X | Números figurados Triangulares

- Los cuatro números triangulares siguientes son: 15, 21, 28, 36
- La fórmula general para obtener el n –ésimo número triangular T_n es: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

.

- Verificación de la propiedad:
  Sea x un número natural cualquiera. Si x es un número triangular entonces debe ser de la forma:

$$x = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(para algún número natural n).}$$

Luego: $x = \frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow 2x = n^2 + n \longrightarrow n^2 + n - 2x = 0$.

Si la última igualdad se considera como una ecuación cuadrática en la variable n entonces, al aplicar la fórmula que resuelve dicha ecuación, se obtiene:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8x}}{2}$$

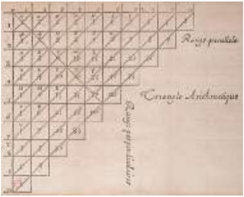
De este modo, para que n sea un número natural, necesariamente la expresión 8x + 1 debe ser el cuadrado de algún número natural.

XI | Números figurados Hexagonales

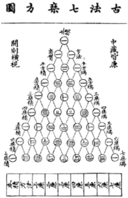
- Los tres números hexagonales siguientes son: 28, 45, 66 .
- La fórmula general para obtener el n –ésimo número hexagonal H_n es: $H_n = n(2n - 1)$.
- Verificación de la propiedad:
  El (2n – 1)–ésimo número triangular T_{2n-1} está dado por $T_{2n-1} = \frac{(2n-1)(2n)}{2}$.

  Así: $T_{2n-1} = \frac{(2n-1)(2n)}{2} = (2n - 1)n = H_n$.

XII | Triángulo de Pascal



Triángulo de Pascal en el escrito original de Pascal



Triángulo aritmético chino

1) Nivel 10:

$$\binom{10}{0}\ \binom{10}{1}\ \binom{10}{2}\ \binom{10}{3}\ \binom{10}{4}\ \binom{10}{5}\ \binom{10}{6}\ \binom{10}{7}\ \binom{10}{8}\ \binom{10}{9}\ \binom{10}{10}$$

2) El desarrollo de (2x − 3y) elevado a 4 es:

$$(2x - 3y)^4 = (2x + (-3y))^4$$

$$= \binom{4}{0}(2x)^4(-3y)^0 + \binom{4}{1}(2x)^3(-3y)^1 + \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)^1(-3y)^3 + \binom{4}{4}(2x)^0(-3y)^4$$

$$= 1\,(16x^4)1 + 4\,(8x^3)(-3y) + 6\,(4x^2)(9y^2) + 4\,(2x)(-27y^3) + 1\,(1)(81y^4)$$

$$= 16x^4 - 96x^3\,y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

XIII | Magia: Adivinando tu edad

- Para 52 años y 2 hermanos: ...
  $52 \cdot 10 = 520$
  $2 \cdot 9 = 18$

  Resta del primer número el segundo:
  $520 - 18 = 502$
  $50 + 2 = 52$

- Demostración de la curiosidad:
  Sean : x: edad de la persona ; y: cantidad de hermanos
  Paso 1 : $10x$
  Paso 2 : $9y$
  Paso 3 : $10x - 9y$
  Paso 4 : sumamos y restamos y (cantidad de hermanos)
  $$10x - 9y + y - y$$
  $$= 10x - 10y + y$$
  $$= 10(x - y) + y$$

  Ahora, si se suman los dígitos del resultado dado nos queda: $x - y + y = x$.

4

XIV | Magia: Adivina el número original sumando cinco números

- Para el 21639 ...

- Conociendo el 21639, propones el primer número dado por: 1641
- Tu amigo elige un número de cuatro cifras cualquiera, por ejemplo: 4352
- Tú propones el complemento a nueves del número dado: 9999 − 4352 = 5647
- Tu amigo elige otro número de cuatro cifras cualquiera, por ejemplo: 7283
- Tú propones el complemento a nueves del segundo número: 9999 −7283 = 2716
- Finalmente, se suman los cinco números de cuatro dígitos y el resultado será el número de cinco dígitos escrito en el papel al inicio.

$$1641 + 4352 + 5647 + 7283 + 2716 = 21639$$

- Demostración del algoritmo:

Observar que, si un número de cuatro dígitos se suma con su complemento a nueves, da como resultado 9999 que, escrito en su forma desarrollada es:

$$9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9$$

Ahora, supongamos que se elige un número entre 20000 y 30000 (que es el que se anota en un papel) tal que el dígito de la unidad de mil es a, de la centena es b, de la decena es c y el dígito de las unidades es d. Luego, este número escrito en su forma desarrollada está dado por

$$2 \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d \qquad (*)$$

Conociendo este número, se propone el número de cuatro dígitos dado por:

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + (d+2)$$

(es decir, los tres primeros dígitos son los tres dígitos centrales del número escrito en el papel y el dígito de las unidades es el dígito de las unidades del escrito en el papel más 2).

Así, al sumar este último número con uno de cuatro dígitos elegido por un amigo más su complemento a nueves, más otro número de cuatro dígitos elegido por un amigo más su complemento a nueves, se obtiene:

$$[a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+(d+2)]+[9\cdot10^3+9\cdot10^2+9\cdot10+9]+[9\cdot10^3+9\cdot10^2+9\cdot10+9]$$
$$=(18+a)\cdot10^3 + (18+b)\cdot10^2 +(18+c)\cdot10+(20+d)$$
$$=(18+a)\cdot10^3 + (18+b)\cdot10^2 +(18+c)\cdot10+(2\cdot10+d)$$
$$=(18+a)\cdot10^3 + (18+b)\cdot10^2 +(18+2+c)\cdot10+d$$
$$=(18+a)\cdot10^3 + (18+b)\cdot10^2 +(20+c)\cdot10+d$$
$$=(18+a)\cdot10^3 + (18+2+b)\cdot10^2 +c\cdot10+d$$
$$=(18+a)\cdot10^3 + (20+b)\cdot10^2 +c\cdot10+d$$
$$=(18+2+a)\cdot10^3 + b\cdot10^2 +c\cdot10+d$$
$$=(20+a)\cdot10^3 + b\cdot10^2 +c\cdot10+d$$
$$= 2\cdot10^4+a\cdot10^3+ b\cdot10^2 +c\cdot10+d$$

(que corresponde al número elegido inicialmente entre 20000 y 30000 anotado en el papel).

REFERENCIAS

BOYER, C. (1987). Historia de la matemática, 1ª. Edición Madrid, España: Alianza Editorial, S.A.

CENTRO VIRTUAL DE DIVULGACIÓN DE LAS MATEMÁTICA. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Pitágoras: Los números poligonales. Disponible en: https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/pitagoras-2.asp.htm

EREÑO, A. (2014). Algoritmos alternativos para la enseñanza de operaciones en educación primaria. Consultada en línea 23 de mayo de 2023: https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2243/Ere%C3%B1oArrizabalaga.pdf?sequence=1&isAllowed=y

GAMIETEA, A. (2001). En el mundo de 142857. Consultada en línea 23 de enero 2023: https://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eure-uaq/n18/en1805.pdf

GARCÍA, J. Y MARTINÓN, A. (1997). Números Poligonales. Consultada en línea 25 de febrero 2023: https://revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/3/09Garcia.pdf

HANS, J., MUÑOZ, J., FERNÁNDEZ-ALISEDA, A. (2006). Suma. La magia del 9. Disponible en: https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/52/073-076.pdf

JARA, P. Y VILLEGAS, S. Números Curiosos. Noviembre 2008. Disponible en: https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2008/numeros.pdf

LEGUIZAMÓN, J. Curiosidades Matemáticas. El Triángulo de Pascal Generalizado. Disponible en: https://www.alammi.info/2congreso/memorias/Documentos/martes/triangulo.pdf

NELSEN, B. (1993). Proofs Without Words I: Exercises in Visual Thinking, 1ª. Edición Portland, Oregón, EEUU: The Mathematical Association of America (incorporated)

NELSEN, B.(2000). Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking, 1ª. Edición Portland, Oregón, EEUU: The Mathematical Association of America (incorporated)

NOBRE, I. (2021). Curiosidades Numéricas: Constante de Kaprekar e soma de cubos. Consultada en línea 22 de mayo de 2023. http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wp-content/uploads/TCC-ISADORA-NOBRE-SILVA-2021.pdf

ONDO, J. (2020). Revista de investigación Pensamiento Matemático. Juegos y Rarezas Matemáticas. Disponible en: https://revista.giepm.com/wp- content/uploads/revista_impresa/vol_X_num_1/jue_rar_2_vol_10_num_1.pdf

PAENZA, A. (2005). Matemática...¿Estás Ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades, 1ª edición Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina.

PAENZA, A. (2006). Matemática...¿Estás Ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades: episodio 2, 1ª edición Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina.

RODRÍGUEZ, O. (2003). El hombre y la máquina. Consultada en línea 15 de febrero 2023: https://www.redalyc.org/pdf/478/47812406012.pdf

TAHAN, M. Matemática Divertida y Curiosa. Disponible en: http://www.librosmaravillosos.com/matematicadivertidaycuriosa/pdf/Matematica%20divertida%20y%20curiosa%20-%20Malba%20Tahan.pdf

VIGGIANI, M. La sucesión de Fibonacci. Consultada en línea 13 agosto 2023: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10717/11348

ZAPATA, F. (2013). Dinamización Matemática: Los números que los pitagóricos ocultaron. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/16075/1/Zapata2013Los.pdf

CURIOSO

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS Y FÍSICAS
FACULTAD DE INGENIERÍA

ISBN: 978-956-6224-36-5
9 789566 224365